差分-微分方程式の解の漸近的行動について (「近似理論の研究」報告集)

栗原, 光信

数理解析研究所講究録
36巻 1968年 59-68

差分－微分方程式の解の漸近的行動について

都立大・理　　栗原光信

§1.　まず．線型差分－微分方程式

(1)　$$u'(t) + [a_0 + a(t)]u(t) + [b_0 + b(t)]u(t-\omega) = 0$$
$$(\omega > 0 \text{ 定数})$$

について考える。いま．連続函数 $a(t)$, $b(t)$ に対し．

$$t \to \infty \text{ のとき}\quad a(t) \to 0,\quad b(t) \to 0$$

ならば．方程式

(2)　$$v'(t) + a_0 v(t) + b_0 v(t-\omega) = 0$$

の一つの特殊解　$v(t) = e^{\lambda t}$ に対応して．同じ漸近的な形をした．(1)の解が存在するであろうと期待できる。ここに．λは

(3)　$$\lambda + a_0 + b_0 e^{-\lambda\omega} = 0 \quad (\text{特性方程式})$$

の根である。(特性根)．

このような(1)と(2)の解の漸近的行動に関しての関係を示すいくつかの結果を以下で述べる。後で(1)に非線型項のついた方程式についても同種の結果を記述する。これらの結果は主に次の2つの文献よりぬきだして整理したものである。

[1]　• R. Bellman & K. L. Cooke ; Differential-Difference Equations, Academic Press New York & London, 1963

[2]　• R. Bellman & K. L. Cooke ; Asymptotic Behavior of Solutions of Differential-Difference Equations, Mem. Amer. Math. Soc. No.35, 1959

方程式(1)について、$b(t)\equiv 0$ の場合と $b(t)\not\equiv 0$ の場合とに分けて、次の2つの定理が導かれる。

定理1. (i) 最大の実部をもつ特性根((3)の根) λ が唯一つ存在して、その λ は real かつ simple とする。

(ii) 係数 $a(t)$ は次の条件(I) 又は (II) のいずれかを満す。

(I) $\int^{\infty}|a(t)|\,dt < +\infty$

(II) 1) $t\to\infty$ のとき $a(t)\to 0$

2) $a(t)\neq 0 \quad (t\geqq t_0)$

3) $a'(t)=o[|a(t)|] \quad (t\to+\infty)$

4) $\int^{\infty}a^2(t)\,dt<+\infty,\ \int^{\infty}|a'(t)|\,dt<+\infty,$

$\int^{\infty}|a''(t)/a(t)|\,dt<+\infty$

このとき、方程式

$$u'(t)+[a_0+a(t)]u(t)+b_0u(t-\omega)=0 \tag{4}$$

は次の形の解をもつ。

$$u(t)=C[1+o(1)]\exp\left[\lambda t-c_1\int_{t_0}^{t}a(r)\,dr\right] \quad (t\to+\infty) \tag{5}$$

ただし、C, C_1 は定数で、

$$c_1=(1-b_0\omega e^{-\lambda\omega})^{-1} \tag{6}$$

定理2. (i) 最大の実部をもつ特性根 λ が唯一つ存在し、その λ は real かつ simple とする。

(ii) 係数 $a(t)$, $b(t)$ は次の(I) 又は(II)のいずれかの条件を満す。

(I) $\int^{\infty}|a(t)|\,dt<+\infty,\quad \int^{\infty}|b(t)|\,dt<+\infty$

(II) 1) $t\to\infty$ のとき、$a(t)\to 0$, $b(t)\to 0$

2) $a(t)\neq 0,\ b(t)\neq 0 \quad (t\geqq t_0)$

3) $a'(t)=o[|a(t)|]$, $b'(t)=o[|b(t)|]$ $(t\to+\infty)$

4) $\int^{\infty}a^2(t)dt<+\infty$, $\int^{\infty}|a'(t)|dt<+\infty$,

$\int^{\infty}|a''(t)/a(t)|dt<+\infty$.

5) $\int^{\infty}b^2(t)dt<+\infty$, $\int^{\infty}|b'(t)|dt<+\infty$,

$\int^{\infty}|b''(t)/a(t)|dt<+\infty$

6) $\int^{\infty}|a(t)b(t)|dt<+\infty$

7) $\lim_{t\to+\infty}\frac{a(t-l\omega)}{a(t)}=1$, $\lim_{t\to+\infty}\frac{b(t-l\omega)}{b(t)}=1$. $(0\leqq l\leqq 1)$

このとき、方程式(1)は次の形の解をもつ。

(7) $$u(t)=Ce^{S(t)}[1+o(1)] \qquad (t\to+\infty)$$

ただし. Cは定数.

(8) $$S(t)=\int_{t_0}^{t}\lambda(t_1)dt_1$$

$$\lambda(t)=\lambda-c_1[a(t)+e^{-\omega\lambda}b(t)]$$

c_1は(6)と同じである。

§2. 準備として. 非同次型線型差分微分方程式

(9) $$u'(t)+a_0u(t)+b_0u(t-\omega)=f(t)$$

の連続な解 $u(t)$ を $u(t)$の$[t_0-\omega, t_0]$における値と$f(t)$を含む項によって表示する。すなわち.

(10) $$u(t)=u(t_0)k(t-t_0)-b_0\int_{t_0-\omega}^{t_0}u(t_1)k(t-t_1-\omega)dt_1 + \int_{t_0}^{t}f(t_1)k(t-t_1)dt_1 \qquad (t>t_0)$$

$k(t)$は次の性質 1)−4) をもつ唯一つの函数である。

1) $k(t)=0$ $(-\omega\leqq t<0)$

2) $k(0)=1$

3) $k(t)$は$t \geqq 0$で連続，$k'(t)$は$t \geqq \omega$で連続。

4) $k'(t) + a_0 k(t) + b_0 k(t-\omega) = 0 \qquad (t > 0)$

さらに，$k(t)$は次の表示で与えられる。

(11) $$k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{st}}{s + a_0 + b_0 e^{-s\omega}}\,ds$$

$$C = \{\, b + i\tau\ ;\ \ b\text{は十分大},\ -\infty < \tau < +\infty \,\}$$

そこで，λを最大の実部をもつ特性根で唯一つしかなく，しかもこれが real で simple であるとすると，

(12) $$k(t) = c_1 e^{\lambda t} + k_1(t)$$

となる。ただし，c_1は(6)と同じで，かつ，

(13) $$|k_1(t)| \leqq c e^{kt} \qquad t \geqq 0,\quad k < \lambda.$$

§3. 定理1の証明の方針を述べよう。方程式(4)より，

(14) $$u'(t) + a_0 u(t) + b_0 u(t-\omega) = -a(t)u(t)$$

の解に(10)の表示を適用して，$u(t) \equiv 0\ (t_0 - \omega \leqq t \leqq t_0)$を初期函数とする解をとくに考えれば，$k(t)$及び$e^{\lambda t}$が(14)の非同次部の方程式(すなわち(2)と同じ)の解となることより，

(15) $$u(t) = ce^{\lambda t} - \int_{t_0}^{t} a(t_1)u(t_1)k(t-t_1)\,dt_1$$

の解が同時に方程式(4)の解になっている。この積分方程式(15)について考察する。定理1の条件(I)が満されている場合は容易である。(15)で(12)の式を代入し，(13)の不等式に注意すれば，

$$|u(t)e^{-\lambda t}| \leqq c + c\int_{t_0}^{t} |a(t_1)|\,|u(t_1)e^{-\lambda t_1}|\,dt_1$$

が得られる。これより，基本不等式の公式を用いて，

$$|u(t)| \leqq ce^{\lambda t}$$

再び(15)式に戻って(15)の右辺の第2項を評価すれば、

$$u(t) = ce^{\lambda t} + o(e^{\lambda t})$$

が得られる。これは条件(I)の満されている場合、求める等式(5)と同値である。

条件(II)が満されている場合は、次の補助定理を本質的に必要とする。

補助定理1. $C_1 > 0$：定数, $f(t)$, $g(t)$は実数値2階微分可能な函数で次の仮定を満す。

1) $t \to +\infty$ のとき、$f(t) \to 0$, $g(t) \to 0$.

2) $g(t) \neq 0 \quad (t \geq t_0)$

3) $g'(t) = o[|g(t)|] \quad (t \to +\infty)$

4) $\int^{\infty} |f'(t)|\, dt < +\infty$, $\int^{\infty} f^2(t)\, dt < +\infty$

5) $\int^{\infty} |g''(t)/g(t)|\, dt < +\infty$, $\int^{\infty} |f(t)g'(t)/g(t)|\, dt < +\infty$.

このとき、次の等式が成立する。

$$\int_{t_0}^{t} g(t_1) \exp\left[C_1 t_1 + \int_{t_0}^{t_1} f(t_2)\, dt_2\right] dt_1$$
$$= [C_1^{-1} + o(1)]\, g(t) \exp\left[C_1 t + \int_{t_0}^{t} f(t_2)\, dt_2\right] \quad (t \to +\infty)$$

(16) $$p(t) = -\int_{t_0}^{t} a(t_1)\, u(t_1)\, k_1(t - t_1)\, dt_1$$

とおくと、等式(15)と(12)より、

(17) $$u(t) = ce^{S(t)} + p(t) - C_1 e^{S(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-S(t_1)} a(t_1)\, p(t_1)\, dt_1$$

ただし、

(18) $$S(t) = \int_{t_0}^{t} [\lambda - C_1 a(r)]\, dr \text{ 。}$$

(19) $$m(t) = \max_{t_0 \leq t_1 \leq t} |u(t_1) e^{-S(t_1)}|$$

とおくと、等式(16)より、

$$|p(t)| \leq ce^{-\lambda t_0} m(t) e^{kt} \int_{t_0}^{t} |a(t_1)| \exp\left[(\lambda - k)t_1 - C_1 \int_{t_0}^{t_1} a(t_2)\, dt_2\right] dt_1$$

が導かれるから、この右辺の積分項の部分に上記の補助定理1を適用する。

したがって

(20) $$|p(t)| \leqq C\, m(t)\, e^{S(t)}\, |a(t)|$$

この(20)式を用いて 等式(17)の右辺を評価すると

$$m(t) \leqq C + o[m(t)] + C\, m(t)$$

または $m(t) \leqq C$

が得られる。これから 求める結果が導かれる。方程式(15)の解の存在は逐次近似法を用いて得られる。

§4. 定理2の証明の方針も定理1のそれとほとんど同様である。(1)において $a(t)$, $b(t)$ を含む項を右辺に移し (10)の表示を用いて §3のときと同様に変形すれば 次の等式を得る。

(21) $$u(t) = Ce^{\lambda t} - C_1 e^{\lambda t}\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda t_1}[a(t_1)u(t_1) + b(t_1)u(t_1-\omega)]\,dt_1 + p(t) \qquad (t \geqq t_0)$$

ただし

(22) $$p(t) = -\int_{t_0}^{t}[a(t_1)u(t_1) + b(t_1)u(t_1-\omega)]\,k_1(t-t_1)\,dt_1$$

そこで

$$v(t) = u(t) - u(t-\omega)e^{\omega\lambda}$$

とおいて (21)式より変形すれば

(23) $$u(t) = p(t) + e^{S(t)} - C_1 e^{S(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-S(t_1)}[a(t_1) + e^{-\omega\lambda} b(t_1)]\,p(t_1)\,dt_1 + C e^{S(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-S(t_1)} b(t_1)\,v(t_1)\,dt_1$$

ここで $S(t)$ は(8)と同じである。これから 次の方程式を得る。

(24) $$\begin{aligned} v(t) = {} & p(t) - p(t-\omega)e^{\omega\lambda} + q(t) \\ & - C_1 q(t)\int_{t_0}^{t-\omega} e^{-S(t_1)}[a(t_1) + e^{-\omega\lambda} b(t_1)]\,p(t_1)\,dt_1 \\ & - C_1 e^{S(t)}\int_{t-\omega}^{t} e^{-S(t_1)}[a(t_1) + e^{-\omega\lambda} b(t_1)]\,p(t_1)\,dt_1 \\ & + C_2\, q(t)\int_{t_0}^{t-\omega} e^{-S(t_1)} b(t_1)\,v(t_1)\,dt_1 \end{aligned}$$

$$+ e^{S(t)}\int_{t-\omega}^{t} e^{-S(t_1)} b(t_1) v(t_1)\,dt_1$$

ただし，

(25) $$q(t)= e^{S(t)} - \exp[\,S(t-\omega)+\omega\lambda\,]$$
$$= e^{S(t)}\left\{1-\exp\left[\omega\lambda-\int_{t-\omega}^{t}\lambda(t_1)\,dt_1\right]\right\}$$

ここで，係数 $a(t)$，$b(t)$ に関する条件を用いて，(21) − (24)を評価して，定理を証明するのである。 しかし計算はかなり複雑である。

§5. 上の定理について注意を2・3述べよう。

1) 定理1または2における条件(II)は複雑な形をしているが，これは，$a(t)\equiv 1/t$，$b(t)\equiv 1/t$ の場合を含んでいる。しかし係数の2階微分可能性を要求しているのは少し不自然のようである。そこで係数の微分可能性を仮定しない方向での十分条件として，例えば定理1において，次の条件(III)が考えられる。即ち，(I)，(II)の代りに(III)を用いてそのまゝ定理が成立する。

(III) $a(t)=O(t^{-\varepsilon})$ $(t\to+\infty)$ なる $\varepsilon>1/2$ が存在する。

2). 定理1または2において，λは最大の実部をもつ唯一つの特性根で，real かつ simple であることを仮定した。 しかし，λが必ずしも最大の実部をもたない特性根である場合や，必ずしも real でない根の場合や，simple でない根の場合についても，同種の定理が導かれる。これらは R. Bellman & K. L. Cooke [2]に詳しく論じられている。

3). 定理2の応用として，方程式(1)の根の漸近展開に関する結果が得られる。

定理3. i) 最大の実部をもつ特性根λが存在し，それが real かつ

simple であるとする。

ii) 係数 $a(t)$, $b(t)$ は次の漸近展開をもつ。

$$a(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{-n}, \qquad b(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{-n} \qquad (t \to +\infty)$$

iii) $a'(t)$, $b'(t)$, $a''(t)$, $b''(t)$ が存在し, power series の漸近展開をもつ。

このとき, 方程式(1)は,

$$u(t) \sim e^{\lambda t} t^{r} \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^{-n}$$

の形の漸近展開をもつ解 $u(t)$ をもつ。ただし,

$$r = -\frac{a_1 + b_1 e^{-\omega\lambda}}{(1 - b_0 \omega e^{-\omega\lambda})}$$

§6. 線型方程式について用いられた手法は例えば次の形の非線型方程式の場合に簡単に拡張できる。

(26) $$u'(t) + [a_0 + a(t)]u(t) + [b_0 + b(t)]u(t-\omega) = f(t, u(t), u(t-\omega))$$

最も容易な例として次の定理を導こう。

定理4. (i) 最大の実部をもつ特性根 λ が real で simple とする。

(ii) $a(t)$, $b(t)$ は $t \geqq 0$ で連続で,

$$\int^{\infty} |a(t)|\,dt < +\infty, \qquad \int^{\infty} |b(t)|\,dt < +\infty.$$

(iii) $t \geqq 0$ とすべての u, v に対し, $f(t, u, v)$ は連続で,

$$|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leqq \phi(t)(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$$

をみたす。ただし, $\int^{\infty} \phi(t)\,dt < +\infty$。

(iv) $t \geqq 0$ に対し $f(t, 0, 0) = 0$

このとき, 方程式(26)は次の形の解 $u(t)$ をもつ。

(27) $$u(t) = ce^{\lambda t}[1+o(1)] \qquad (t \to +\infty)$$

まず、方程式(26)を

(28) $$u'(t) + a_0 u(t) + b_0 u(t-\omega)$$
$$= -a(t)u(t) - b(t)u(t-\omega) + f(t, u(t), u(t-\omega))$$

と変形すれば、§3と同じ過程をへて、積分方程式

(29) $$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + \int_{t_0}^{t} k(t-t_1)[-a(t_1)u(t_1) - b(t_1)u(t_1-\omega)$$
$$+ f(t_1, u(t_1), u(t_1-\omega))]\,dt_1$$

の解はまた(28)の解にもなる。(29)が無限区間にわたっての解をもつことを逐次近似法によって証明する。すなわち、

(30) $$u_n(t) = c_1 e^{\lambda t} \quad ; t_0-\omega \leqq t \leqq t_0, \qquad n=0,1,2,\cdots\cdots$$
$$u_0(t) = c_1 e^{\lambda t} \quad ; t \geqq t_0$$
$$u_{n+1}(t) = c_1 e^{\lambda t} + \int_{t_0}^{t} k(t-t_1)[-a(t_1)u_n(t_1) - b(t_1)u_n(t_1-\omega)$$
$$+ f(t_1, u_n(t_1), u_n(t_1-\omega))]\,dt_1$$
$$; t \geqq t_0, \quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

と定義する。(12)、(13)より $|k(t)| \leqq ce^{\lambda t}$ だから、

$$\|u(t)\| = |u(t)| + |u(t-\omega)|$$

とおくと、(30)より、

$$\|u_{n+1}(t)\|e^{-\lambda t} \leqq c + c\int_{t_0}^{t}[|a(t_1)| + |b(t_1)| + \phi(t_1)]$$
$$\times \|u_n(t_1)\|e^{-\lambda t_1}\,dt_1$$

t_0を十分大きくえらべば、$\|u_n(t)\| \leqq ce^{\lambda t} \quad (t \geqq t_0-\omega)$

一方、

$$m_n(t) = \max_{t_0-\omega \leqq t_1 \leqq t} \|u_n(t_1) - u_{n-1}(t_1)\|e^{-\lambda t_1}$$

とすると、$m_{n+1}(t) \leqq c\, m_n(t)$、$c<1$ とできる。したがって、

$\{u_n(t)\}$は(29)の解$u(t)$に一様収束し、しかも$u(t)$は$t \geqq t_0 - \omega$で定義され、$\|u(t)\| \leqq ce^{\lambda t}$ $(t \geqq t_0 - \omega)$をみたす。

そこで

$$k(t) = c_1 e^{\lambda t} + k_1(t), \quad |k_1(t)| \leqq ce^{kt} \qquad k < \lambda$$

を(29)に代入し、

$$J_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-t_1)} [-a(t_1)u(t_1) - b(t_1)u(t_1 - \omega) + f\,]\,dt_1$$

$$J_2(t) = \int_{t_0}^{t} k_1(t - t_1) [-a(t_1)u(t_1) - b(t_1)u(t_1 - \omega) + f\,]\,dt_1$$

の積分を各々評価すれば、

$$J_1(t) = ce^{\lambda t} + o(e^{\lambda t}), \qquad J_2(t) = o(e^{\lambda t})$$

を得、求める等式(27)を導くことができる。